Σύμφωνα με τον ορισμό του ολοκληρώματος κατά Riemann (που όπως αναφέραμε, είναι ισοδύναμος με τον ορισμό του Darboux με τα $U(f,P), L(f,P)$):
Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b] \Leftrightarrow$ υπάρχει αριθμός I ώστε $(\forall \varepsilon>0)\ (\exists \delta>0)$ για κάθε διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ του $[a,b]$ και για κάθε επιλογή σημείων $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,\dots,n$, να ισχύει $|\Sigma(f,P,\Xi)-I|<\varepsilon$ όπου $\Sigma(f,P,\Xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$. Μάλιστα, όπως αναφέραμε, οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι και $I=\int_a^b f(x)dx$.

<u>Συνέπεια</u>: Αν επιλέξουμε $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $P_n=\{a=x_0^n<x_1^n<\dots<x_n^n=b\}$ μια ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ με $\|P_n\|\to 0$ και $\forall n\in\mathbb{N}$ μια τυχαία επιλογή ενδιάμεσων στοιχείων $\Xi_n=(\xi_k^n)_{k=1}^n$ $(\xi_k^n\in[x_{k-1}^n,x_k^n])$ τότε $\lim \Sigma(f,P_n,\Xi_n)=\int_a^b f(x)dx$.

Συνήθως, επιλέγουμε ως σημεία της Ξ_n τα αριστερά ή δεξιά άκρα των διαστημάτων της διαμέρισης.

<u>Εφαρμογές</u>: Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Με τι είναι ίσο το όριο $\lim\limits_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$;

$\forall n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση $P_n=\{0=x_0^n<x_1^n<\dots<x_n^n=1\}$ και $x_k^n=\frac{k}{n}$, για την οποία ισχύει $\|P_n\|=\frac{1}{n}\to 0$

Επιλέγουμε ως ενδιάμεσα σημεία, τα δεξιά άκρα των διαστημάτων $[x_{k-1}^n, x_k^n]$: $\xi_k^n = x_k^n$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, εφόσον $\|P_n\| \to 0$,

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_n \Sigma(f, P_n, \Xi_n) = \lim_n \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) = \lim_n \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} =$$

$$= \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Παραδείγματα:

① Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$.

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

Θέτω $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0,1]$ και έχουμε $a_n = \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα ολοκληρώσιμη.

Έτσι, $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2 - \cancel{\log 1}^{0} = \log 2$.

Γενικότερα, αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, $\lim_n \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$

Παίρνοντας $P_n = \{a = x_0^n < x_1^n < \dots < \underset{a+k\frac{b-a}{n}}{x_k^n} < \dots < x_n^n = b\}$

και ως ενδιάμεσα σημεία τα δεξιά άκρα των διαστημάτων:

$\xi_k^n = x_k^n = a + k\frac{b-a}{n}$ και $\|P_n\| = \frac{b-a}{n} \to 0$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \Sigma(f, P_n, \Xi_n).$$

② $a_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \lim_n \Sigma(f, P_n, \Xi_n) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = 2/3$.

Όπου $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ συνεχής άρα και ολοκληρώσιμη και

$P_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n}\}$ και $\xi_k^n = \frac{k}{n}$.

Σημείωση: Τα δύο προηγούμενα όρια που υπολογίσατε, δεν μπορούν να βρεθούν με χρήση θεωρήματος ισοσυγκλινουσών ακολουθιών.

Άσκηση: Δίνεται η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$. Να δειχθεί ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι $\log n = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$, άρα $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$.

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, +\infty)$ είναι φθίνουσα.

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{k}$ (*)

Έτσι: $a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} - \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx\right) =$

$= \frac{1}{n+1} - \left(\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le 0$ Από την (*)

Δηλαδή, $a_{n+1} \le a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως, η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

Επίσης, για $n \ge 2$: $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x}\,dx \overset{(*)}{\le}$
$\le \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$.

Άρα, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx =$

$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx\right) + \frac{1}{n} \ge 0 + \frac{1}{n} \ge 0$.

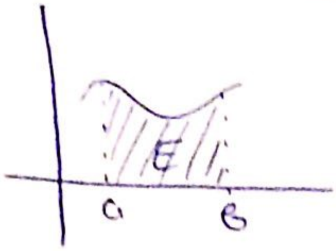
Συνεπώς, η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη κάτω από το 0.

Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, άρα συγκλίνουσα.

Ιστορική Σημείωση: Το όριο της (a_n) συμβολίζεται με γ και ονομάζεται σταθερά του Euler (ή Euler-Mascheroni), $\gamma \simeq 0.57721\dots$. Δεν είναι γνωστό αν ο γ είναι ρητός ή άρρητος.

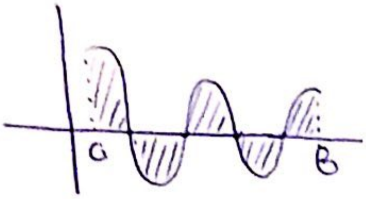
Παρατήρηση: Σύμφωνα με τις παραπάνω ανισότητες, για $n \ge 2$:

$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \le \log n \le 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}$.



Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$

$$E=\int_a^b f(x)dx$$



Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και το $f(x)$ παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές στο $[a,b]$

$$E=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

"Γενικευμένα Ολοκληρώματα"

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x]$ $\forall x>a$.

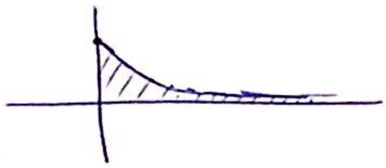
- Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,+\infty)$ ή ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ συγκλίνει. (γενικευμένο ολοκλήρωμα ισούται με πραγματικό αριθμό I).
- Αν το παραπάνω όριο υπάρχει και είναι $+\infty$ ή $-\infty$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f υπάρχει και είναι $+\infty$ ή $-\infty$, αντίστοιχα.
- Εντελώς ανάλογα, για συναρτήσεις $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$.
  $\int_{-\infty}^b f(t)dt=\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt.$
- Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $[a,b]$, επιλέγουμε $c\in\mathbb{R}$ και θέτουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^{c} f(t)dt+\int_c^{+\infty} f(t)dt$, υπό την προϋπόθεση ότι τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα υπάρχουν και ορίζεται το άθροισμά τους.
- Αν $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής $[a,x]$ με $a<x<b$. Εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$.
  (και δίνουμε ανάλογους ορισμούς με πριν για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)dt$.)

- Αν $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής $[x,b]$ με $a<x<b$. Εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$ (και δίνουμε ανάλογους ορισμούς με πριν για το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)dt$.)

- Αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε $[x,y]$ με $a<x<y<b$. Επιλέγω $c\in(a,b)$ και ορίζω $\int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt$, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα ολοκληρώματα και ορίζεται το άθροισμά τους.

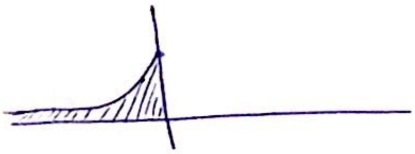
<u>Παραδείγματα:</u>

▸ $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=x}=$

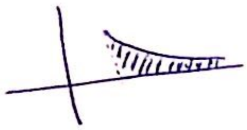


$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((-e^{-x})-(-e^{0})\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x})=1$

▸ Ομοίως, $\int_{-\infty}^0 e^{t}dt=1$.



▸ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t}dt=$



$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\log t\right]_{t=1}^{t=x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\log x-\cancel{\log 1}^{\,0})=+\infty$

▸ Για $p>1$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^p}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x t^{-p}dt=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{t^{-p+1}}{1-p}\right]_{t=1}^{t=x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}-\frac{1^{1-p}}{1-p}\right)=-\frac{1}{1-p}$

▸ Για $p<1$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^p}dt=\dots=+\infty$

▸ $\int_0^1\log t\,dt$

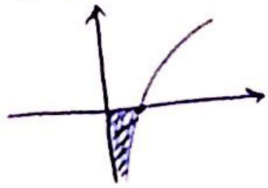
Η συνάρτηση $f(t)=\log t$ δεν ορίζεται στο 0 και μάλιστα δεν είναι φραγμένη στο $(0,1]$ (διότι $\lim\limits_{t\to0^+}\log t=-\infty$).

Η f είναι συνεχής στο $(0,1]$ άρα ολοκληρώσιμη σε κάθε $[x,1]$, $0<x<1$.

Είναι, συνεπώς, γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \log t\,dt = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \log t\,dt = \lim_{x\to 0^+}\left[t\log t - t\right]_{t=x}^{t=1} = \lim_{x\to 0^+}\left((1\log 1-1)-(x\log x - x)\right) =$$

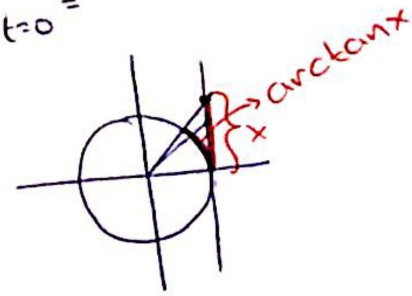
$$= \lim_{x\to 0^+}(x-1-x\log x) = -1.$$



▶ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left[\arctan t\right]_{t=0}^{t=x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\arctan x = \pi/2$$

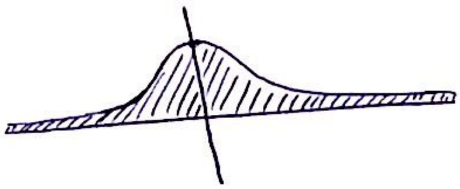


$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to-\infty}\left[\arctan t\right]_{t=x}^{t=0} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(-\arctan x) = -(-\pi/2) = \pi/2$$

Υπάρχουν τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα και ορίζεται το άθροισμά τους. Οπότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi/2 + \pi/2 = \pi.$$



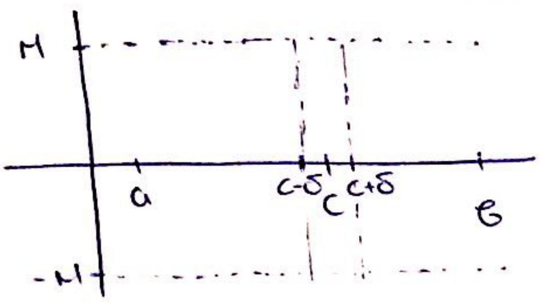
Σημαντική Άσκηση: (~ Θεωρία)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και $c\in[a,b]$ ώστε η f συνεχής σε κάθε $x\neq c$. Να δειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη:

Εφόσον f φραγμένη, $\exists M>0$ ώστε $|f(x)|\leq M$ $\forall x\in[a,b]$.

Υποθέτουμε πως $a<c<b$. (Οι περιπτώσεις που $c=a$ ή $c=b$ αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο και μάλιστα είναι πιο εύκολες.)



Έστω $\varepsilon>0$ (και αναζητούμε διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$).

Επιλέγουμε $\delta>0$ με $\delta<\min\{c-a, c-b\}$, τέτοιο ώστε $\delta<\frac{\varepsilon}{12M}$.

Η f συνεχής στο $[a, c-\delta]$, άρα ολοκληρώσιμη.

Άρα, από το κριτήριο Riemann, υπάρχει μια διαμέριση του $[a, c-\delta]$:

$P_1=\{a=x_0<x_1<\dots<x_m=c-\delta\}$ ώστε:

$U(f,P_1)-L(f,P_1)<\varepsilon/3$.

Ομοίως, για το $[c+\delta, b]$, υπάρχει μια διαμέριση του $[c+\delta, b]$:

$P_2=\{c+\delta=x_{m+1}<x_{m+2}<\dots<x_n=b\}$ ώστε:

$U(f,P_2)-L(f,P_2)<\varepsilon/3$.

Η $P=P_1\cup P_2$ είναι διαμέριση του $[a,b]$:

$$P=\{a=x_0<x_1<\dots<\underset{c-\delta}{x_m}<\underset{c+\delta}{x_{m+1}}<\dots<x_n=b\}$$

$m_k=\inf\{f(x) \quad x\in[x_{k-1},x_k]\}$

$M_k=\sup\{f(x) \quad x\in[x_{k-1},x_k]\}$, $k=1,\dots,n$.

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})+(M_{m+1}-m_{m+1})(x_{m+1}-x_m)+$$

$$+\sum_{k=m+2}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})\leq$$

$$\leq U(f,P_1)-L(f,P_1)+(M-(-M))2\delta+U(f,P_2)-L(f,P_2)<$$

$$<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.$$

Επομένως, η f ολοκληρώσιμη.